

Tekst 36: Dedekind om irrationale tal

Det lykkedes flere forskellige matematikere uafhængigt af hinanden omkring 1870 at lave en konstruktion af de irrationale tal ud fra de rationale. Richard Dedekind publicerede sin konstruktion i 1872 i form af værket *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, hvorfra der er gengivet udklip nedenfor efter den danske oversættelse i [Wolff 1967, pp. 130–39].

- a) Hvad var Dedekinds motivation til at give differentialregningen et aritmetisk grundlag? Hvilken sætning følte han specielt savnede et ordentligt bevis?
- b) Gennemgå Dedekinds karakteristik af de rationale tal og af linien. Hvordan beskriver han liniens kontinuitet?

Richard Dedekind

KONTINUITET OG IRRATIONALE TAL

Første gang min opmærksomhed henledtes på de betragtninger, der er emnet for dette skrift, var i efteråret 1858. Som professor ved den polytekniske læreanstalt

i Zürich skulle jeg for første gang forelæse over elementer af differentialregningen, og jeg følte stærkere end nogen sinde før mangelen af et strengt videnskabeligt grundlag for aritmetikken. Under diskussionen af en variabel størrelses nærmen sig til en grænseværdi og især under beviset for sætningen om, at enhver størrelse, der vokser kontinuert og ikke ud over alle grænser, med sikkerhed nærmer sig til en grænseværdi, måtte jeg ty til geometriske metoder. Selv på nuværende tidspunkt betragter jeg anvendelsen af geometrisk anskuelighed i en første præsentation af differentialregningen som overordentlig nyttig set fra et pædagogisk synspunkt, og den er helt uundværlig, hvis man ikke har for megen tid at spille. At denne form for indførelse i differentialregningen imidlertid ikke kan gøre krav på at være videnskabelig, vil ingen benægte. For mit eget vedkommende var denne følelse af utilfredsstillelse så overvældende, at jeg over for mig selv aflagde det løfte vedblivende at fundere over dette spørgsmål, indtil jeg havde fundet et strengt, rent aritmetisk grundlag for principperne i infinitesimal-analysen. Det erklæres så ofte, at differentialregningen beskæftiger sig med kontinuerte størrelser, og dog gives der ingen steder forklaring af denne kontinuitet. Selv de mest dybtgående fremstillinger af differentialregningen baserer ikke deres beviser på kontinuitet, men gør, mere eller mindre uden at vide det, brug af geometriske begreber eller af ideer hentet i geometrien, eller bygger på sætninger, der aldrig godtgøres på rent aritmetisk vis. Til disse sidstnævnte hører for eksempel ovennævnte sætning, og en nøjere undersøgelse overbeviste mig om, at denne sætning eller en dermed ensbetydende på en måde kunne betragtes som et tilstrækkeligt grundlag for infinitesimal-analysen. For på samme tid at sikre sig en virkelig definition af kontinuitetens væsen resterede det da blot at afsløre sætningens sande oprindelse i aritmetikkens grundelementer.

Dedekind nævner derefter, at han fandt en sådan definition af kontinuitetens væsen i november 1858, men at han først har følt behov for at publicere den efter at have fået kendskab til Heines og Cantors arbejde på samme område.

I. Egenskaber ved de rationale tal

Den aritmetiske indførelse af de rationale tal forudsættes her bekendt, [...]

Dette system [af de rationale tal], som jeg vil betegne med R , besidder den fuldstændighed og den afsluttedhed, som jeg andetsteds¹ har fremdraget som det karakteristiske for et tallegeme, og som går ud på, at de fire fundamentale operationer altid lader sig udføre med hvilke som helst to elementer fra R , idet vi dog som eneste undtagelsestilfælde må se bort fra division med 0.

Det er imidlertid en ganske anden egenskab ved systemet R , der er den vigtigste i dette tilfælde; vi kan udtrykke den ved at sige, at systemet R udgør et ordnet en-dimensionalt område, der strækker sig i det uendelige i to hinanden modsatte retninger. Hvad der menes hermed, er tydeligt angivet ved min brug

¹ *Vorlesungen über Zahlentheorie* af P. G. Lejeune Dirichlet, 2. udg., §159.

af udtryk fra geometrien; men netop i denne sammenhæng er det nødvendigt, at man fuldstændigt klargør de tilsvarende rent aritmetiske egenskaber, for at det ikke på nogen som helst måde skal tage sig ud, som havde aritmetikken brug for ideer, der er den helt uvedkommende.

Vil vi udtrykke, at symbolerne a og b repræsenterer et og samme rationale tal, skriver vi $a = b$ eller $b = a$. At to rationale tal er forskellige, giver sig til kende ved, at differensen $a - b$ enten har en positiv eller en negativ værdi. I det første tilfælde siges a at være større end b , b mindre end a , hvilket også angives ved symbolerne $a > b$, $b < a$.² Da $b - a$ i det sidstnævnte tilfælde har en positiv værdi, følger det, at $b > a$, $a < b$.

For disse to måder, som to tal kan afvige fra hinanden på, gælder følgende love:

- I. Hvis $a > b$ og $b > c$, da $a > c$. Er a og c to forskellige tal, og er b større end det ene og mindre end det andet, vil vi uden betænkning og med tilskyndelse i geometriske begreber udtrykke dette kort ved at sige: b ligger mellem de to tal a og c .
- II. Er a og c to forskellige tal, da ligger der uendelig mange forskellige tal mellem a og c .
- III. Er a et vilkårligt fast tal, da falder alle tallene i systemet R i to klasser A_1 og A_2 , der hver indeholder uendelig mange elementer; den første klasse A_1 omfatter alle tal a_1 , som er $< a$, den anden klasse A_2 består af alle tal a_2 , der er $> a$. Tallet a selv kan efter behag tilskrives den første eller den anden klasse, og det bliver da henholdsvis det største tal i den første klasse eller det mindste tal i den anden. I begge tilfælde er opdelingen af systemet R i de to klasser A_1 og A_2 af en sådan art, at ethvert tal i den første klasse A_1 er mindre end ethvert tal i den anden klasse A_2 .

II. Sammenligning af de rationale tal med punkterne på en ret linie

De ovennævnte egenskaber ved de rationale tal leder tanken hen på de tilsvarende beliggenhedsrelationer mellem punkterne på en ret linie L . Betegnes de to modsatte retninger på L med "højre" og "venstre", og er p og q to forskellige punkter, da vil enten p ligge til højre for q og samtidig q til venstre for p eller omvendt q ligge til højre for p og samtidig p til venstre for q . En tredje mulighed kan ikke indtræffe, hvis p og q da virkelig er forskellige punkter. For denne forskel i beliggenhed gælder følgende love:

²I det følgende menes dette såkaldt "algebraiske" større end og mindre end, medmindre der tilføjes ordet "absolut".

- I. Hvis p ligger til højre for q og q til højre for r , da ligger p til højre for r , og vi siger, at q ligger mellem punkterne p og r .
- II. Hvis p og r er to forskellige punkter, da ligger der altid uendelig mange punkter mellem p og r .
- III. Hvis p er et givet punkt på L , da falder alle punkterne på L i to klasser P_1 og P_2 , som hver indeholder uendeligt mange elementer; den første klasse P_1 indeholder alle punkter p_1 , som ligger til venstre for p , og den anden klasse P_2 indeholder alle punkter p_2 , som ligger til højre for p ; punktet p selv kan efter behag medregnes i den første eller den anden klasse. I begge tilfælde er opdelingen af den rette linie L i to klasser eller dele af en sådan art, at ethvert punkt i den første klasse P_1 ligger til venstre for ethvert punkt i den anden klasse P_2 .

Denne analogi mellem de rationale tal og punkterne på en ret linie bliver som bekendt til en virkelig korrespondance, når vi på den rette linie fastlægger et bestemt begyndelsespunkt eller nulpunkt O og en bestemt enhedslængde til brug ved måling af liniestykker. Ved hjælp af denne sidstnævnte kan den til ethvert rational tal a svarende længde konstrueres, og indlægger vi denne på den rette linie, til højre eller til venstre for O , eftersom a er positiv eller negativ, når vi frem til et bestemt endepunkt p , der kan betragtes som det til tallet a svarende punkt; til det rationale tal nul svarer punktet O . På denne måde vil der til ethvert rationalt a , det vil sige til ethvert element i R , svare et og kun et punkt p , dvs. et element i L . Hvis de to punkter p og q henholdsvis svarer til tallene a og b , og hvis $a > b$, da ligger p til højre for q . Til lovene I, II, III i det foregående afsnit svarer fuldstændig lovene I, II, III i dette.

III. Den rette linies kontinuitet

Det er imidlertid af den allerstørste vigtighed, at der på den rette linie L findes uendelig mange punkter, der ikke svarer til noget rationalt tal. Dersom punktet p svarer til det rationale tal a , så er som bekendt længden Op kommensorabel med den ved konstruktionen af p konstante længdeenhed, dvs. at der findes en tredje længde — et såkaldt fællesmål — som er et helt multiplum af disse to længder. Men allerede oldtidens grækere vidste og kunne give bevis for, at der findes længder, som er inkommensurable med en givet længdeenhed, for eksempel diagonalen i det kvadrat, der har længdeenheden som side. Afsætter vi på linien L en sådan længde ud fra punktet O , får vi et endepunkt, der ikke vil svare til noget rationalt tal. Da det endvidere let kan vises, at der findes uendelig mange længder, som er inkommensurable med længdeenheden, må vi fastslå: den rette linie L er uendeligt rigere på punktelementer, end området R af rationale tal er det på talelementer.

Hvis vi nu, som det er vort ønske, forsøger at følge alle fænomener på den rette linie op inden for aritmetikken, viser de rationale tals område sig at være

utilstrækkeligt, og det bliver tvingende nødvendigt, at det ved indførelsen af de rationale tal konstruerede instrument R væsentlig forbedres ved indførelsen af nye tal, således at tallenes område opnår samme fuldstændighed — eller som vi straks vil sige — samme kontinuitet som den rette linie. [...]

Ovenstående sammenligning af de rationale tals område R med en ret linie førte til erkendelsen af visse huller i førstnævnte område, altså en vis ufuldstændighed eller diskontinuitet, hvorimod vi jo tilskriver den rette linie fuldstændighed, mangel på huller, eller kontinuitet. Hvori består da denne kontinuitet? [...] Længe spekulerede jeg forgæves herover, indtil jeg endelig fandt, hvad jeg søgte. Denne opdagelse vil man sikkert vurdere forskelligt; de fleste vil formodentlig være af den mening, at den i sit hovedindhold er ganske triviell. Den går ud på følgende: I det foregående afsnit blev det fremhævet, at ethvert punkt p på den rette linie frembringer en deling af denne i to klasser, således at ethvert punkt i den ene klasse ligger til venstre for ethvert punkt i den anden. Jeg mener, at kontinuitetens væsen består i det omvendte, dvs. følgende, princip:

“Dersom alle den rette linies punkter falder i to klasser, således at ethvert punkt i den ene klasse ligger til venstre for ethvert punkt i den anden klasse, da findes der et og kun et punkt, der frembringer denne deling af alle punkter i to klasser, denne opspaltning af den rette linie i to dele.”

Som jeg allerede har sagt, så tror jeg ikke, jeg tager fejl, når jeg antager, at alle straks vil indrømme mig gyldigheden af denne påstand; de fleste af mine læsere vil sikkert blive meget skuffede ved at erfare, at det er denne trivielle bemærkning, der afslører kontinuitetens hemmelighed. Hertil vil jeg sige, at jeg vil være glad, om alle finder ovenstående princip indlysende og i overensstemmelse med deres egen opfattelse af den rette linie; thi jeg er helt og aldeles ude af stand til at anføre et bevis for dets gyldighed, og det er der ingen, der magter. Antagelsen af denne egenskab ved linien er simpelthen et axiom, der tilfører linien dens kontinuitet. [...]

IV. Indførelse af de irrationale tal

Ud fra disse sidste bemærkninger er det tilstrækkeligt klart, hvorledes de rationale tals diskontinuerte område R kan gøres fuldstændigt, så at det udgør et kontinuert område. I Afsnit I fremhævedes det, at ethvert rationalt tal a frembringer en deling af systemet R i to klasser, således at ethvert tal a_1 i den første klasse A_1 er mindre end ethvert tal a_2 i den anden klasse A_2 ; tallet a er da enten det største tal i klassen A_1 eller det mindste tal i klassen A_2 . Er der nu givet en vilkårlig deling af systemet R i to klasser A_1 og A_2 , hvis eneste karakteristiske egenskab er, at ethvert tal a_1 i A_1 er mindre end ethvert tal a_2 i A_2 , da vil vi for kortheds skyld kalde denne deling for et *snit* og betegne den (A_1, A_2) . Vi kan derfor sige, at ethvert rationalt tal a frembringer et snit, eller rettere sagt to

snit, som vi imidlertid ikke vil anse for væsensforskellige; dette snit har *yderligere* den egenskab, at der enten blandt tallene i den første klasse findes et, der er størst, eller at der blandt tallene i den anden klasse findes et, der er mindst. Og omvendt, har et snit denne egenskab, da er det frembragt af et sådant største og eller mindste rationalt tal.

Men det er let at vise, at der findes uendelig mange snit, som ikke er frembragt af noget rationalt tal.

Dedekind viser dernæst omhyggeligt, at hvis D er et helt tal, der ikke er et kvadrattal, og A_2 består af de positive, rationale tal hvis kvadrat er større end D , og A_1 af resten af de rationale tal, så findes intet rationalt tal som frembringer snittet (A_1, A_2) .

Ufuldstændigheden eller diskontinuiteten af de rationale tals område R giver sig netop til kende ved, at det ikke er alle snit, der er frembragt af rationale tal.

Når som helst vi har at gøre med et snit (A_1, A_2) , der ikke er frembragt af et rationalt tal, indfører vi et nyt såkaldt *irrationalt* tal a , som vi vil betragte som fuldstændigt defineret ved snittet (A_1, A_2) ; vi siger om tallet a , at det svarer til dette snit, eller at det frembringer dette snit. Der vil altså fra nu af til ethvert forelagt snit svare et bestemt rationalt eller irrationalt tal, og vi vil betragte de to tal som *forskellige* eller *ulige store*, når og kun når de svarer til væsensforskellige snit.

Dedekind viser herefter at systemet af rationale og irrationale tal kan ordnes, så de opfylder lovene I, II og III, samt kontinuitetsprincippet, og at man kan indføre de fire regneoperationer på dem, samt at disse vil opfylde de velkendte love.