

En matematisk revolution

– den ikke-euklidiske geometri

Gennem næsten 2000 år stod Euklids (ca. 325-265 f.Kr.) aksiomsystem for geometrien som det sikre og fuldstændige grundlag for erkendelsen af størrelsesforhold og relationer i det fysiske rum. Dog var matematikerne ikke helt tilfredse med Euklids formulering af et enkelt af aksiomerne, nemlig det femte postulat, også kendt som parallelpostulatet. Det forekom ikke så intuitivt selvfølgelig som de øvrige aksiomer, og det var heller ikke umiddelbart indlysende, at det overhovedet var nødvendigt. Kunne det ikke bevises ud fra de andre aksiomer? Det blev der gjort mange (som vi nu ved, mislykkede) forsøg på fra oldtiden og fremefter, og der blev fundet mange sætninger, som kunne vises at være ækvivalente med Euklids version af postulatet, bl.a. at vinkelsummen i en trekant er lig med to rette vinkler (180°), eller at der gennem et punkt uden for en given ret linie kan tegnes én, og kun én, ret linie, som ikke skærer den givne (fordi den er parallel med den).

Et af de mest berømte forsøg på at bevise parallelpostulatet blev gjort af G. Saccheri (1667-1733) i bogen *Euclides ab omni naevo vindicatus* (»Euklid retfærdiggjort fra enhver plet«) fra 1733. Hans teknik bestod i at undersøge, hvilke sætninger han kunne udlede, hvis han benægtede parallelpostulatet, men opretholdt Euklids øvrige aksiomer. Hans berømmelse skyldes, at han kom frem til mange sætninger, som senere blev en del af den ikke-euklidiske geometri; nogle af dem forekom ham imidlertid så absurde, at han mente sig berettiget til at hævde, at Euklid nu var retfærdiggjort.

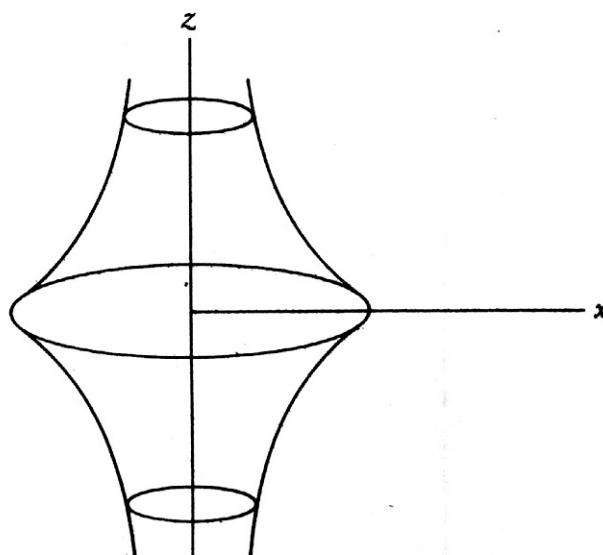
I 1800-tallet blev Saccheris bog studeret af den store tyske matematiker C.F. Gauss (1777-1855) samt af ungaren J. Bolyai (1802-60) og russeren N. I. Lobatjevskij (1792-1856). Omkring 1830 var de alle tre, uafhængigt af hinanden, nået frem til, at det var muligt at konstruere en mulig geometri ved at tillade, at der gennem et punkt kan tegnes et helt bundt af divergerende linier, som ikke skærer en given linie. Ligesom Saccheri beviste de en lang række sætninger, som ville gælde i en sådan geometri, bl.a. at vinkelsummen i en trekant vil være mindre end 180° . I modsætning til Saccheri afviste de ikke de »absurde« sætninger, men accepterede dem som konsekvenser af en ny form for geometri, og derfor opfattes deres arbejder som den ikke-euklidiske geometris begyndelse.

Følgerne heraf var ikke blot matematiske. Hvis Euklids geometri kun er én blandt flere mulige geometrier, hvilken af disse er så den rette beskrivelse af den fysiske verden? Dette spørgsmål må naturligvis besvares empirisk, og Gauss, som i forvejen stod i spidsen for den geodætiske opmåling af Tyskland, foretog en nøjagtig bestemmelse af vinkelsummen i en trekant udgjort af tre bjergtoppe uden dog at kunne fastslå en afvigelse fra 180° . Men både Gauss, Bolyai og Lobatjevskij var bevidste om, at Euklids geometri ikke længere kunne betragtes som det selvindlysende, aprioriske grundlag for fysisk erkendelse.

Gauss offentliggjorde ikke sine resultater, og de to øvrige publikationer forblev upåagtede i begyndelsen, bl.a. fordi det ikke var lykke-

des nogen af dem at bevise, at den nye geometri var modsigelsesfri. Det var først, da Gauss' manuskripter blev offentliggjort i 1855, efter hans død, at matematikerne blev opmærksomme på den ikke-euklidiske geometri. En af Gauss' elever, G.F.B. Riemann (1826-66), udviklede fra midten af 1850'erne en ny geometrisk beskrivelse af flader, som også havde konsekvenser for forståelsen af ikke-euklidisk geometri. Traditionelt opfattedes eksempelvis en kugleflade som en todimensional figur indlejret i det tredimensionale rum, og man benyttede euklidisk rumgeometri til at udlede den sfæriske trigonometris sætninger. I Riemanns geometri betragtedes kuglefladen som et todimensionalt rum, hvor der gjaldt et andet aksiomsystem end i den todimensionale euklidiske plan. På kuglen er de geodætiske linier, dvs. de kurver, der angiver den korteste vej mellem to punkter, storcirkler, som derfor er analoge til de rette linier i planen. Da vinkelsummen i en sfærisk trekant altid er større end 180° , er det klart, at geometrien på kuglefladen ikke tilfredsstiller Euklids parallelpostulat, hvilket også fremgår af, at alle storcirkler skærer hinanden, så der ikke findes nogen parallelle storcirkler. Riemann viste, at kuglefladens krumning hang entydigt sammen med geometrien på kuglen, og at man for et vilkårligt rum med vilkårlig dimension kunne definere krumningen i et givet punkt ud fra kendskab til rummets karakteristiske geometri i en lille omegn omkring det givne punkt. Riemann understregede, at geometrien i, og dermed krumningen af, det tredimensionale fysiske rum vi lever i, ikke kan bestemmes af matematikken alene, men må fastlægges ved fysiske målinger.

Riemanns arbejde blev videreført i 1866 af italieneren E. Beltrami (1835-1900), som specielt interesserede sig for rum, hvor krumningen er den samme i ethvert punkt. I to dimensioner er eksemplerne kuglefladen, hvor krumningen er positiv, planen, hvor krumningen er nul, og den såkaldte pseudosfære (se figur 104 på næste side), som har konstant negativ krumning. Han kunne vise, at geometrien på pseudosfæren var den samme som den, Gauss, Bolyai og Lobatjevskij havde fundet, og kuglen, planen og pseudosfæren er således todimensionale modeller af tre forskellige geometrier, hvor vinkelsummen i en trekant er henholdsvis større end, lig med eller mindre end 180° . Med disse modeller kunne man nu visualisere to væsensforskellige ikke-euklidiske geometrier og deres relationer til sædvanlig euklidisk geometri.



FIGUR 104: Beltramis pseudosfære fremkommer ved rotation af en speciel kurve, kaldet traktricen, omkring dennes asymptote (z-aksen).

I 1870'erne viste Felix Klein (1849-1925), at disse geometrier kunne opfattes som underafdelinger af en mere abstrakt og generel form for geometri, den såkaldte projektive geometri. I sin tiltrædelsesforelæsning ved universitetet i Erlangen – senere kendt som Erlangerprogrammet – karakteriserede han i 1872 de forskellige geometrier ved hjælp af grupper af transformationer (dvs. afbildninger af punkterne i en plan på punkter i en anden plan), der lod bestemte størrelser være invariante. Den affine gruppe af transformationer er f.eks. karakteriseret ved, at rette linier afbildes i rette linier, og parallelle rette linier afbildes i parallelle rette linier, men længder og størrelser af vinkler ændres. Affin geometri er således bestemt som mængden af størrelser, der er invariante under affine transformationer, og tilsvarende for andre geometrier. Den euklidiske geometri er et specielt eksempel på en affin geometri, mens de ikke-euklidiske geometrier på kuglen og pseudosfæren falder uden for gruppen af affine geometrier.

David Hilbert (1862-1943) udfærdigede i 1899 et system af abstrakte aksiomer for den euklidiske geometri for at skabe et grundlag, som var helt uafhængigt af erfaringen. Han benyttede ganske vist de

sædvanlige ord som punkt, linie, plan etc., men understregede, at han lige så godt kunne have talt om borde, stole eller ølkrus; de begreber, der indgik i hans aksiomer, skulle opfattes som udefinerede og blottet for enhver intuitiv betydning. Aksiomsystemet indeholdt naturligvis et aksiom, der svarede til Euklids paralleelpostulat; hvis man erstattede det med andre aksiomer, kunne systemet beskrive de forskellige ikke-euklidiske geometrier, og systemet kunne derfor siges at danne et strengt modsigelsesfrit grundlag for geometrien som helhed. Hilbert kunne dog kun bevise, at systemet var modsigelsesfrit under forudsætning af, at aritmetikken var det, idet hans bevis byggede på, at eksempelvis punkter kunne repræsenteres ved talpar, som var underkastet aritmetikkens regneregler.