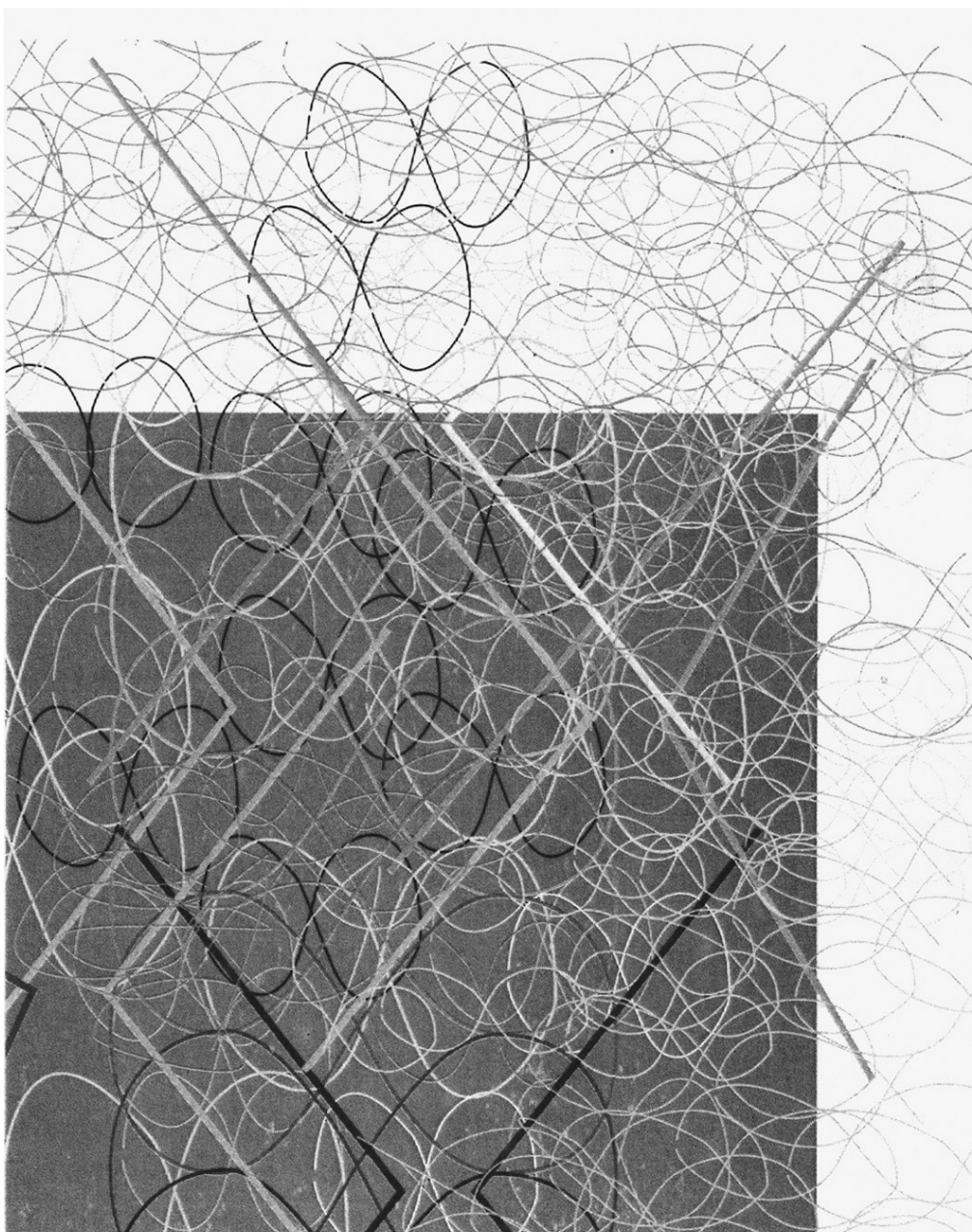


MATEMATIKENS ASPEKTER



Lars Mejlbo

Om det uendelige

Om det uendelige

© Lars Mejlbo og Matematiklærerforeningen 1991

Redaktør: Vibeke Svaneborg

ISBN 8789229-45-2

Omslag: Kurt Finsten

Bogen kan købes ved skriftlig henvendelse til:

LMFK sekretariatet
Slotsgade 2, 3. sal
2200 København N

I. HVAD ER UENDELIG?

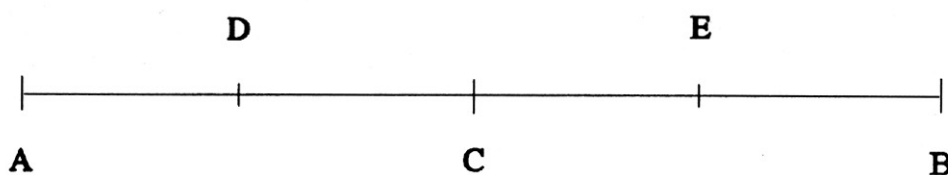
I dagligsproget betyder *uendelig* oftest det samme som *utallig*. F.eks. vil nogle vælge formuleringen "*der er utallige stjerner på himlen*", mens andre (lige så godt) vil kunne sige, at "*der er uendeligt mange*", og man mener vel blot, at man kan tælle og tælle og blive ved uden nogensinde at blive færdig med at tælle. (Faktisk er der under 10.000 stjerner, der er synlige med det blotte øje, og det er ikke flere, end der samles af mennesker på Christiansborg Slotsplads ved en demonstration af moderat størrelse!).

Dagligsprogets brug af *utallig/uendelig* er således noget upræcis. I forskellige videnskaber som teologi, filosofi, fysik etc. har man forsøgt at præcisere ordet, men det er nok i matematikken, man er nået længst, hvilket naturligvis hænger sammen med, at uendelige processer - f.eks. i form af grænseovergange - er helt fundamentale i matematikken, samtidig med, at det uendelige i matematikken er simplere at forholde sig til end det uendelige i filosofi og teologi.

Det betyder ikke, at matematikerne var eller er fuldstændig enige om betydningen af ordet. Det bruges faktisk i mindst to væsensforskellige betydninger, og lad mig prøve at forklare denne forskel, selv om jeg i det efterfølgende udelukkende vil holde mig til den ene betydning.

Eksempel

Et liniestykke AB kan halvdeles i C, og derved fremkommer der *to* nye liniestykker AC og CB, som hver for sig kan halvdeles i D og E.



figur 1

Vi har nu *fire* liniestykker AD, DC, CE, EB, og de kan hver for sig halvdeles osv., osv. Vi kan sige, at der opstår

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots 2^n \dots$$

liniestykker, der stadig halvdeles, og derfor er der

$$2, 3, 5, 9, 17, \dots 2^n + 1 \dots$$

punkter.

Der er nu to muligheder:

Man kan sige, at man konstruerer, altså at der opstår, nye punkter på liniestykket eller kontinuét AB. Der opstår til stadighed flere og flere punkter på linien, men der er *på intet tidspunkt flere end endeligt mange punkter*. Det er imidlertid et *endeligt antal, der vokser over alle grænser*. Der opstår med andre ord et antal punkter, som ikke kan tælles. Man siger, at antallet af punkter er **POTENTIelt UENDELIGT**.

Den anden mulighed er, at man på forhånd opfatter liniestykket AB som en *mængde* af allerede eksisterende punkter. Punkter, som man efterhånden finder nogle af. Liniestykket er - som *punktmængde* - **AKTUELT UENDELIGT**.

Ordene **POTENTIelt UENDELIG** og **AKTUELT UENDELIG** stammer helt tilbage fra Antikken, fra den græske filosof Aristoteles (ca. 350 f.Kr.). Han mente, at matematikerne faktisk kun brugte det ene af disse begreber, nemlig det potentielt uendelige, og at dette begreb "var nok".

Faktisk har der været - og er stadig - en spænding mellem disse to uendelighedsbegreber i matematikken. Man kan groft sige, at et flertal af matematikerne var enige med Aristoteles indtil ca. 1850-60, men efter den tid er der sket en drejning, således at mængdelæren har "sejret" i dette århundrede, og et flertal nu "tror på" det aktuelt uendelige. Det er da også det, som jeg vil holde mig til.

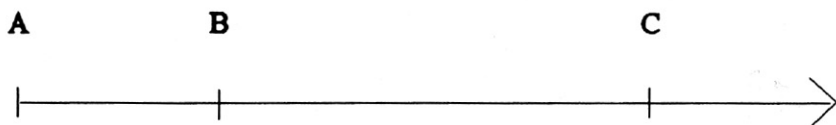
II. PARADOKSER VED DET UENDELIGE

En af den klassiske matematiks grundsætninger er formuleret af Euklid (ca. 300 f.Kr.):

DET HELE ER STØRRE END EN DEL AF DET.

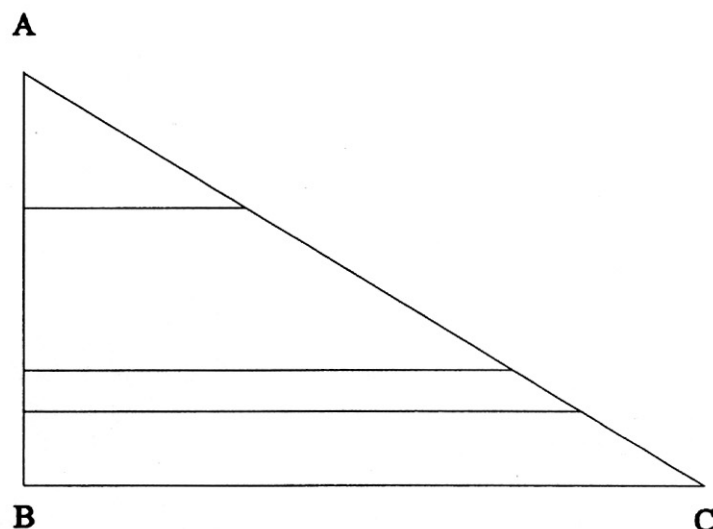
En sætning, som synes selvindlysende i dagligsproget, men som bare ikke gælder for (aktuelt) uendelige mængder, og det er måske en væsentlig grund til, at disse (aktuelt) uendelige mængder har været så lang tid om at blive accepterede.

Lad os tage et par ulige lange liniestykker AB og AC. Opfatter man disse som punktmængder, vil man umiddelbart sige, at der er flere punkter på det lange liniestykke AC, end der er på det korte liniestykke AB.



figur 2

Allerede tidligt - måske allerede i Antikken, men i hvert fald i Middelalderens skolastik - indså man, at tesen er højst tvivlsom (se fig. 3).



figur 3

De vandrette streger markerer en "sammenparring" af punkterne på AB med punkterne på AC, så der må være lige mange! Det kan man også se rent analytisk ved at betragte en koordinatakse ud ad AC med A som begyndelsespunkt (fig. 2) og angive en en-entydig afbildning f (en sammenparring) mellem punkterne x på AB og punkterne y på AC:

$$f(x) = y$$

hvor y er bestemt ved, at

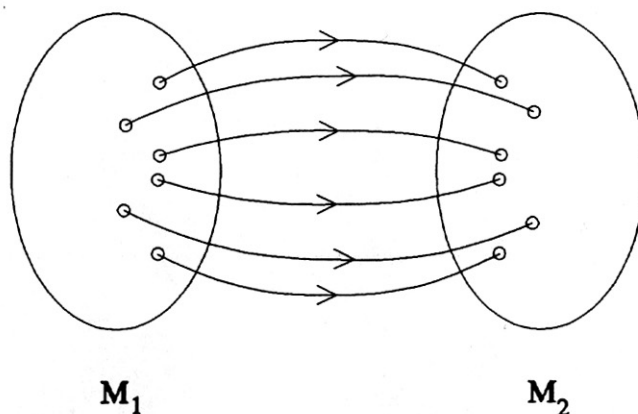
$$\frac{x}{|AB|} = \frac{y}{|AC|}$$

eller

$$y = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot x$$

Husk på, at man allerede i første klasse lærer, at der er *lige mange* punkter i to mængder M_1 og M_2 , hvis man kan sammenparre elementerne i de to mængder (se fig. 4). Først ved at *tælle* finder man ud af, at der er 6 elementer

i hver mængde, men det er i denne sammenhæng sådan set ligegyldigt, hvor mange der er, for vi kan opdage, at der er *lige mange* uden at tælle!

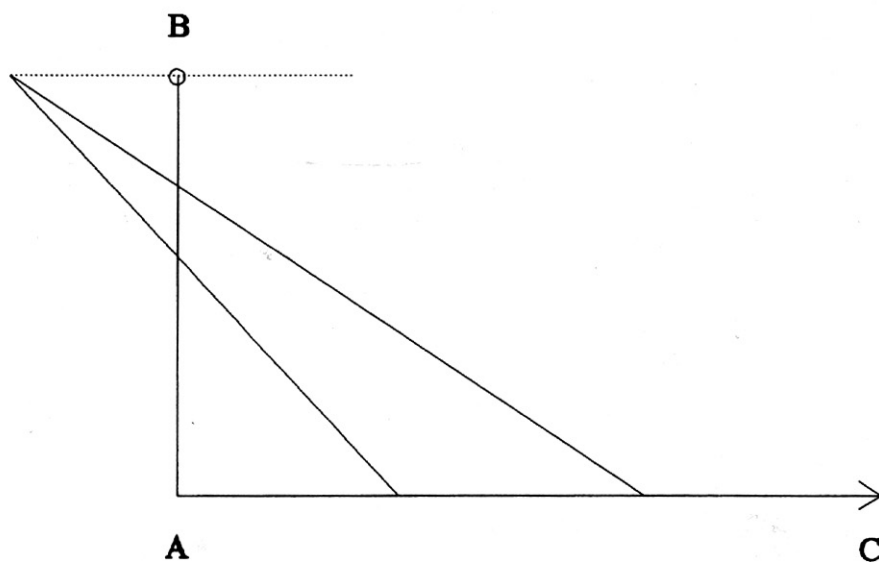


figur 4

Sagt på en anden måde:

Der er lige mange kopper og underkopper, hvis man kan anbringe hver kop i en underkop, uden at der bliver hverken kopper eller underkopper tilovers!

Her betyder det faktisk ikke noget, om AC har en endelig længde eller ej. F.eks. har det halvåbne liniestykke AB (hvor B ikke er med) lige så mange punkter som halvlinien AC (se fig. 5).



figur 5

Øvelse

Gør rede for, at et åbent liniestykke AB (hvor A og B ikke er med) har lige så mange punkter som en hel linie. (Vink: man kan "knække" AB).

Kommentar:

Det er straks meget sværere direkte at vise, at der er lige mange punkter på et lukket liniestykke, f.eks. $[0;1]$ og et halvåbent liniestykke, f.eks. $]0;1]$, men det gælder. (Hvis du prøver at vise den sidste påstand, så må du være forberedt på, at en en-entydig afbildning af $[0;1]$ på $]0;1]$ *nødvendigtvis* har uendeligt mange diskontinuitetspunkter. Se evt. Lars Mejlbo, "Uendelighedens paradokser", Matematiklærerforeningen 1991.)

Den store fysiker Galilei gjorde i 1630'erne den iagttagelse, at der er lige så mange kvadrattal, som der er naturlige tal, til trods for, at kvadrattallene udgør en ægte del af de naturlige tal. Her har vi igen et tilfælde, der er i modstrid med Euklids grundsætning.

Galilei argumenterede nemlig med, at sammenparringen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
†	†	†	†	†	†	†	†	†	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	...

- altså at den en-entydige afbildning $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, hvor $f(n) = n^2$, viser påstanden. Herudaf drog han den lidt pessimistiske slutning, at endelige mennesker ikke skal beskæftige sig med det uendelige. Heldigvis rettede hverken han selv eller senere matematikere sig efter dette.

III. HILBERTS HOTEL

Dette afsnit fortsætter for så vidt det foregående, men der er den væsentlige forskel, at eksemplerne i de foregående afsnit er opstået "spontan" og så at sige "ufrivilligt", hvorimod de eksempler, som vi skal se på i dette afsnit, er konstrueret til lejligheden.

Den store matematiker David Hilbert (1862-1943) kendte nemlig mængdelæren. Han holdt forelæsninger over den, og ofte indledte han med at fortælle tilhørerne om et mærkeligt og magisk hotel, som siden har fået navnet HILBERTS HOTEL.

Det mærkelige ved Hilberts Hotel er, at der er *uendelig mange værelser*. Som på ethvert godt hotel er værelserne nummererede:

1 2 3 4 5 6 ... n ...

og da der er uendelig mange værelser, skal vi bruge alle de naturlige tal til nummereringen.

Det magiske ved Hilberts Hotel er, at selv om det er fuldt, så er der alligevel plads til flere gæster - og alle gæster har naturligvis enkeltværelse!

Lad os i de følgende eksempler antage, at alle værelser er optaget med én gæst i hvert værelse.

TILFÆLDE 1:

At der nu kommer en gæst til, som gerne vil bo der, tager receptionen helt roligt: den foretager et 'allekald' og beder gæsten i værelse nr. 1 om at flytte til værelse nr. 2, gæsten i værelse nr. 2 om at flytte til nr. 3, gæsten i værelse nr. n om at flytte til værelse nr. n+1 osv. Nu er værelse nr. 1 ledigt, og den nye gæst flytter ind i det. Receptionens procedure kan matematisk beskrives ved afbildningen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, hvor $f(n) = n + 1$.

TILFÆLDE 2:

Alle sover nu roligt (i parentes bemærket: hotellet ligger i Nisseland, og alle gæster er - ikke alene usædvanligt fredsommelige - men også hurtigere end lynet, hvilket receptionen i øvrigt også er!).

De sover altså alle roligt, vel at mærke indtil der kommer 17 nye gæster, der alle vil have et værelse. Hvordan klarer receptionen det? Jo, den benytter afbildningen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, hvor $f(n) = n + 17$.

Her er 17 et vilkårligt, endeligt tal, så receptionen kan på analog vis klare 3742 nye gæster. Hvordan?

TILFÆLDE 3:

Hvad nu, hvis der pludselig dukker et rejseselskab op med uendelig mange deltagere: kan de allesammen få et enkeltværelse?

Intet problem for den snedige reception, der blot flytter gæsten i værelse nr. 1 til værelse nr. 2, nr. 2 til nr. 4, nr. 3 til nr. 6. Man flytter altså på én gang alle gæster fra et værelse til det værelse, der har det dobbelte nummer. Den tilhørende afbildning er: $f(n) = 2n$. Nu har alle de før så sødt sovende gæster fået en ny plads, hvor de kan sove videre, mens alle de nye gæster kan komme til at sove i værelserne med ulige numre, altså numrene:

$2n - 1$, hvor $n = 1, 2, 3 \dots$

TILFÆLDE 4:

Læseren vil nu sagtens kunne hjælpe receptionen med at klare 7 rejseselskaber med uendelig mange deltagere i hvert. (Vink: Udnyt, at et vilkårligt naturligt tal giver netop én af resterne $0, 1, 2, \dots, p-1$ ved division med det naturlige tal p).

TILFÆLDE 5:

Lad os nu tage et mere alvorligt problem, og lad os her - for nemheds skyld - antage, at hotellet er tomt, da der pludselig ankommer uendeligt mange rejseselskaber, hver med uendelig mange deltagere: Kan vi få plads til dem alle?

Ja, det kan vi, men nu kræver det, at man er rimeligt smart i receptionen! Vi kan anbringe dem således: Det *første* selskab anbringes i de uendelig mange værelser med *ulige* numre:

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad 2n-1 \quad \dots$$

Det andet selskab anbringes i de værelser, hvis numre er 2 gange et ulige tal. Dem er der også uendelig mange af, nemlig tallene

$$2 \quad 6 \quad 10 \quad \dots \quad 2(2n-1) \quad \dots$$

Det tredje selskab anbringes i de værelser, hvis numre er det dobbelte af de foregående, altså de uendelig mange værelser, hvis numre er 4 gange et ulige tal, nemlig

$$4 \quad 12 \quad 20 \quad \dots \quad 4(2n-1) \quad \dots$$

Således fortsættes. Det k 'te selskab anbringes i de værelser, hvis numre er 2^{k-1} gange et ulige tal, dvs.

$$2^{k-1} \quad 2^{k-1} \cdot 3 \quad \dots \quad 2^{k-1}(2n-1) \quad \dots$$

Hermed har vi fået anbragt dem alle sammen, og de kan sove fredeligt. Hotellet er fuldt.

Læseren bedes som øvelse anbringe gæsterne således, at der er uendelig mange ledige værelser, selv efter at de uendelig mange rejseselskaber er placeret på hotellet. Så behøver receptionen nemlig slet ikke at forstyrre gæsternes søvn, hvis der skulle komme flere. På den anden side sover hoteldirektøren måske ikke så godt med så mange ledige værelser - eller hvordan mon med det?

Man kan tilsyneladende klare alt på Hilberts Hotel, men er det nu også rigtigt? *Kan* man virkelig det?

IV. ER DER FLERE SLAGS UENDELIG?

Det var Georg Cantor (1845-1918), der for alvor undersøgte spørgsmålet om størrelsen af det uendelige, og det var hans opdagelse i 1873 af, at der er flere reelle tal (dvs. alle hele, rationale og irrationale tal), end der er naturlige tal, der satte gang i mængdelæren. Der er således flere slags uendelig, og de reelle tals uendelighed - også kaldet "kontinuets mægtighed" - er altså større end de naturlige tals uendelighed. Vi skriver:

$$\begin{array}{c} = \\ N < R \end{array}$$

og siger, at mægtigheden af de naturlige tal er mindre end mægtigheden af de reelle tal.

Formuleret i relation til Hilberts Hotel betyder dette, at hvis der kom et rejseselskab med lige så mange deltagere, som der er reelle tal, så måtte selv Hilberts Hotel give op. Der ville ikke være plads.

Lad os præcisere:

DEFINITION:

To mængder A og B (f.eks. en mængde af kopper og en mængde af underkopper) siges at have *samme antal elementer* eller at have *samme mægtighed*, hvis ethvert element fra A kan "sammenparres" med et og kun ét element fra B (med andre ord: hver kop kan sættes i én underkop, således at der hverken er kopper eller underkopper tilovers, eller for at tale mere matematisk: At der findes en en-entydig afbildning af A på B, altså en bijektion af A på B). Vi skriver:

$$\begin{array}{c} = \\ A = B \end{array}$$

Man kan også sige, at vi ligesom i Hilberts Hotel kan anbringe hver eneste gæst i hver sit enkeltværelse.

Den sidste omformulering viser, at man skal passe lidt på, hvis der er uendelig mange elementer i A og B. For selvom A og B har samme mægtighed, så kunne man godt få noget tilovers, enten i A eller i B, hvis man er lidt klodset. Faktisk skal man til hotelformuleringen føje: således at hver enkelt værelse bliver optaget.

Hvis N som sædvanligt betegner mængden af naturlige tal, og H mængden af værelser i Hilberts Hotel, gælder altså, at

$$\begin{array}{c} = \\ N = H \end{array}$$

idet hvert værelse jo kan identificeres med sit nummer.

En mængde, der har samme mægtighed som de naturlige tal, kaldes TÆLLELIG.

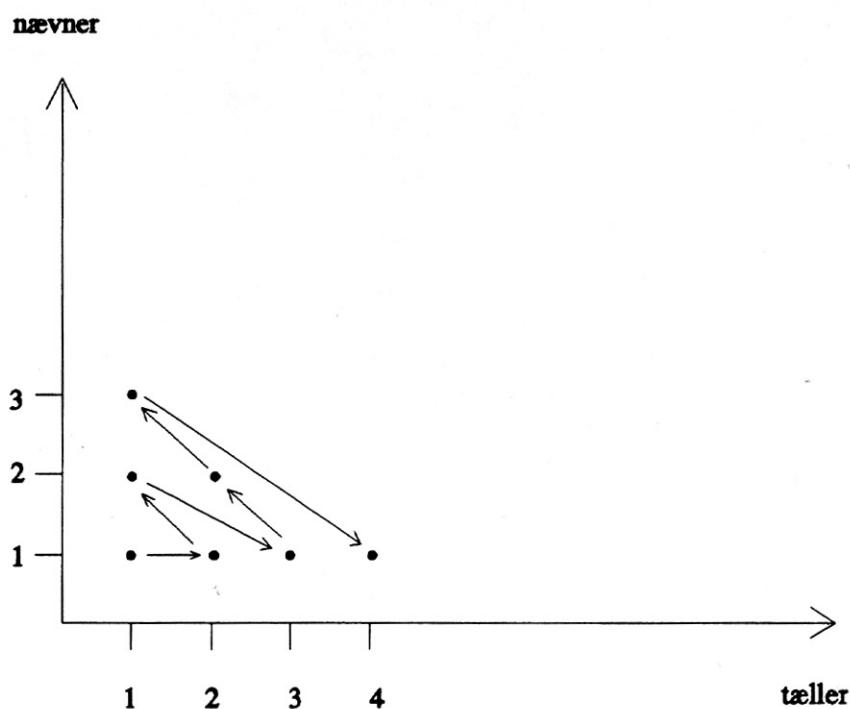
Hvis Q betegner mængden af de rationale tal, så gælder der, at

$$\overline{N} = \overline{Q}$$

altså at Q er tællelig.

For at overbevise os om dette, skal vi lave en sammenparring mellem elementerne i N og i Q .

Ved at følge pilene i nedenstående gitter fås følgende opskrivning af de positive rationale tal:



figur 6

For hvert gitterpunkt (a,b) dannes brøken $\frac{a}{b}$. Herved fremkommer samtlige positive rationale tal - nogle endda to gange. Hvis et tal allerede er listet, slettes det.

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{1} = 3, \frac{1}{3}, \frac{4}{1} = 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \text{ osv.}$$

Sammenparringen mellem N og Q foregår nu således, at vi efter at have startet med 0 fortsætter med "plus" og derefter "minus" hvert element fra listen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	O.S.V.
0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

Vi har hermed vist, at Q er en tællelig mængde. Mængden af reelle tal R er derimod *ikke* tællelig.

Vi kan endda indse, at ikke engang de reelle tal mellem 0 og 1 er tællelige. Vi bruger hertil et *indirekte argument*. Vi vil vise, at det ikke er muligt at stille de reelle tal mellem 0 og 1 op i en rækkefølge, så alle er med. Disse tal kan jo skrives som uendelige decimalbrøker, der begynder med 0. Lad os antage, at det var muligt at skrive dem alle op i en rækkefølge, og at denne rækkefølge f.eks. var

1):	0, 7 4 3 8 6 7 2 ...
2):	0, 0 3 5 8 1 2 5 ...
3):	0, 1 5 7 4 3 3 6 ...
4):	0, 4 6 3 2 8 1 5 ...
:	
:	

Så skulle enhver decimalbrøk 0, ... og dermed ethvert reelt tal mellem 0 og 1 forekomme et sted i denne uendelige række af uendelige decimalbrøker.

Vi betragter så en uendelig decimalbrøk, som bliver til på følgende måde: På første plads efter kommaet vælger vi et ciffer, som er forskelligt fra det tilsvarende ciffer i den første af ovenstående decimalbrøker, f.eks. 8. På anden plads et ciffer, som er forskelligt fra det andet ciffer i den anden decimalbrøk, og således fortsættes. Vi får herved en decimalbrøk, f.eks.

0, 8 4 8 3 ...

som har mindst ét ciffer forskelligt fra hvert af de opskrevne tal i rækkefølgen. Den kan derfor ikke være med i rækkefølgen, som altså ikke kan indeholde alle reelle tal mellem 0 og 1.

Ovenstående berømte *diagonalbevis* tog det Cantor flere måneder at finde frem til, selv om han var overbevist om, at det måtte forholde sig således, at de reelle tal er af større mægtighed end de rationale tal. Nogle af Cantors overvejelser i denne sammenhæng fremgår af hans brevveksling med Dedekind. Dele af disse breve er gengivet på side 17 - 18.

Hvordan skal vi så udtrykke, at der *ikke* er lige mange, altså f.eks. at der er flere underkopper, end der er kopper? Ser vi på det ovenstående, så må det være sådan, at *ligegyldigt* hvordan vi sætter kopper i underkopper, så vil der *altid* blive nogle underkopper til overs.

Hvis der kun er endeligt mange af hver, så behøver vi kun at prøve én gang, men er der uendeligt mange af hver, skal man strengt taget prøve *alle* muligheder, og dem er der uendeligt mange af, så det kan godt blive lidt besværligt! I nogle tilfælde kan man imidlertid klare det.

Altså: Mængden A har mindre mægtighed end mængden B, og vi skriver:

$$\begin{array}{c} = \\ A < B \end{array}$$

hvis B ikke kan sammenparres med A, eller med andre ord: *Ligegyldigt* hvordan vi knytter et element a fra A sammen med et element b fra B, så vil der altid blive nogle b'er til overs. (Her er formuleringen en smule upræcis; dette være sagt for at stoppe munden på eventuelt pedantiske læsere, der ved for meget.)

Der gælder altså:

$$\begin{array}{c} = \\ N < R \end{array}$$

Cantors diagonalmetode kan imidlertid generaliseres, og på den måde kan man vise, at der til enhver mængde M_1 findes en mængde M_2 med større mægtighed. Til enhver mægtighed kan man altså finde en større!

V. HVAD ER CANTORS KONTINUUMSHYPOTESE?

Titlen på dette afsnit er tyvstjålet fra en berømt afhandling af den kendte logiker Kurt Gödel (1906-1978). Men titlen er jo god nok, selvom jeg ikke når Gödel i dybsindighed.

Af det foregående afsnit følger, at $N < R$. Cantors kontinuumshypotese går ud på, at der *ikke* findes nogen mængde M , så $N \subset M \subset R$, og så

$$\begin{array}{c} = \\ N < M < R \end{array}$$

Eller mere positivt udtrykt: hvis $N \subset M \subset R$, så er enten

$$\begin{array}{c} = \\ N = M \text{ eller } M = R \end{array}$$

Cantor brugte meget tid på at prøve at bevise eller modbevise hypotesen - men det lykkedes ikke! Men det er nu også et usædvanligt ondsindet problem!

I slutningen af 30'erne viste Gödel nemlig, at man godt kan antage, at

kontinuumshypotesen er opfyldt, uden at matematikken kommer i kvaler. Groft sagt svarer det til, at man ikke kan bevise, at $0 = 1$ (!).

Men dermed er historien ikke slut. For i 60'erne viste Paul Cohen, at man godt kan antage, at kontinuumshypotesen ikke er opfyldt. Det kommer man nemlig heller ikke i kvaler med!

Men er kontinuumshypotesen sand? - Se, det ved man ikke; og en hel del matematikere afviser endda spørgsmålet som meningsløst.

Ak ja. Nu er vi ved at komme ind på matematikkens filosofi - og det er en helt andet historie!

APPENDIX.

Til uddybning af det sidste afsnit bringes uddrag af Cantors breve til Dedekind,

Beviset for, at de reelle tal ikke udgør en tællelig mængde, forekommer ret oplagt, når man får det præsenteret i en lærebog. Men skønt Cantor troede på sætningens rigtighed og spekulerede meget over den, gik der (som nævnt) lang tid, før han blev i stand til at bevise den.

Nedenfor er gengivet et uddrag af et brev, Cantor skrev til Dedekind 29. november 1873. Cantor afslører her, at han har spekuleret meget over, hvordan han skal bevise, at de reelle tal ikke er tællelige, og han beder Dedekind om hjælp.

Af det følgende brev, som er dateret 2. december 1873, fremgår det, at Dedekind må have svaret øjeblikkeligt, at han ikke er i stand til at klare problemet.

I dagene mellem den 2. og 7. december må Cantor imidlertid have arbejdet med sagen, så han i brevet dateret den 7. december kan meddele Dedekind, at han har overvundet vanskelighederne og dermed lagt grunden til læren om mængders mægtighed og den moderne mængdelære. Det bevis, som Cantor fandt i 1873, var imidlertid temmelig besværligt. Først i 1890 fandt han på det berømte diagonalbevis, som er gengivet ovenfor.

BREV FRA CANTOR TIL DEDEKIND 29. NOVEMBER 1873

...Må jeg stille dig et spørgsmål, som har betydelig interesse for mig, men som jeg ikke selv kan besvare?

Det drejer sig om følgende: Lad os betragte de naturlige tal N og de positive reelle tal R_+ . Så lyder mit spørgsmål: Kan disse to mængders elementer parres sammen to og to, så ethvert element i den ene mængde svarer til et element i den anden? Ved første øjekast vil man svare: "Nej, dette er umuligt, for N består af enkeltelementer, mens R_+ udgør en sammenhængende talmængde. Men denne indvending beviser ikke noget. Og selv om jeg stærkt fornemmer, at en sammenparring af N og R_+ ikke er mulig, så har jeg ikke kunnet finde et bevis herfor.

Problemet plager mig, men måske er svaret ganske simpelt.

Man ville jo også ved første øjekast forsværge, at N skulle kunne sammenparres med de positive rationale tal Q_+ , og dog er det ikke svært at se, at en sådan sammenparring er mulig.

BREV FRA CANTOR TIL DEDEKIND 2. DECEMBER 1873

...Jeg blev meget glad for dit svar på mit sidste brev, som jeg modtog i dag. Jeg stillede dig spørgsmålet af en bestemt grund. I adskillige år har jeg spekuleret over det, og jeg er blevet i tvivl, om det blot er mig, der ikke kan gennemskue problemet, eller om det frembyder principielle vanskeligheder. Da du heller ikke kan klare det, må jeg gå ud fra, at det er det sidste, der er tilfældet.

Jeg må dog sige, at jeg aldrig har arbejdet intenst med sagen, da den ikke ser ud til at kunne få praktisk betydning. Og du kan have ret i, at den af den grund ikke er en større indsats værd.

Men det ville være en smuk sætning.

BREV FRA CANTOR TIL DEDEKIND 7. DECEMBER 1873

...I de sidste dage har jeg haft tid til at beskæftige mig mere indgående med det problem, jeg nævnte for dig sidst, og jeg tror, at jeg i dag er nået til vejs ende. Der er ingen, der bedre end du er i stand til at dømme om, hvorvidt jeg tager fejl. Jeg sender dig derfor mit endnu ufærdige manuskript og beder dig dømme derom.

Aftryk af afsnit 4.4 "Drøm og krise", TAL OG GEOMETRI